— Türev   5. Ders

Örnek: $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $f(x)=\sqrt{x}$ için $f'(4)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

veya $f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

⊛ sağ türev: $f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

sol türev: $f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

f $x=a$ da türevli $\Leftrightarrow$ $f'(a)=f'(a^+)=f'(a^-)$ olmalıdır.

⊛ f, a da sürekli ol.oz. a daki türeve bakılır. Süreklilik için ~~koşul~~dur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}4x-2, & x\geq 2\\ x^2+2, & x<2\end{cases}$ için $f'(2)=?$

f, $x=2$ de sürekli midir?

$\lim_{x\to 2^-}(x^2+2)=6=\lim_{x\to 2^+}(4x-2)=6=f(2)$ olduğundan $x=2$ de sürekli

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{x^2+2-6}^{(x-2)(x+2)}}{x-2}=4$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{4x-2-6}^{4(x-2)}}{x-2}=4$$

$\Big\} = f'(2)=4$

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = |x^2 - 1|$ için $f'(1) = ?$ $f'(2) = ?$

$x = 1, x = -1$ kök

$\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = f(1) \Rightarrow x = 1$ de sürekli

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{(1-x^2)}^{(1-x)(1+x)} - 0}{x - 1} = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = 2$$

$\Big\}\ \neq\ f'(1)$ yoktur.

(*) Mutlak değerde kritik noktalarda türev yoktur!!

$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $\quad y' = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ eğimler farklı

(*) Benzer şekilde $f'(-1)$ de yoktur.

(*) $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} = 4$

(*)

Bu gibi noktalarda türev yoktur.

(*) Türevlenebilme özelliği f grafiğinde düzgünlüğe karşılık gelir.

Teorem: Eğer f fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi varsa o noktada süreklidir. TS

Tersi her zaman doğru değildir. Yani bir noktada sürekli olan fonk o noktada türevli olmayabilir. Örn $y = |x|$ $x = 0$ için

Türevli ise süreklidir $\equiv$ sürekli değilse türevli değildir

Örnek: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - x - 2}$ hangi noktalarda türevli değildir?

Tanımlı değilse sürekli değil, sürekli değilse türevli değildir

Fonk $x = 2$ ve $x = -1$ de süreksiz olup türevli de değildir.

Örn: $f(x)=\begin{cases} x^3 & x<2 \\ 8, & x=2 \\ 3x+2, & x>2 \end{cases}$ $x=2$ deki türevi

$\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+2)=8=f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}x^3=8 \Rightarrow x=2$ de sürekli

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x<2 \\ 0, & x=2 \\ 3, & x>2 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} f'(2^-)=3.2^2=12 \\ f'(2^+)=3 \end{matrix}\right] \neq$ olduğundan $f'(2)$ yoktur

yukarı

Örn: $f(x)=\begin{cases} x^3+2x, & x>1 \\ 3, & x=1 \\ x^4+1, & x<1 \end{cases}$ $x=1$ deki türevi

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3+2x)=3 \neq \lim\limits_{x\to 1^-}(x^4+1)=2$ $x=1$ de sürekli değil, türevli de olmaz.

Türev Alma Kuralları

1) $c\in\mathbb{R}$ için $y=f(x)=c$ ise $y'=0$, $y=3$, $y=-1/2$

2) $n\in\mathbb{R}$ için $y=x^n$ ise $y'=nx^{n-1}$, $y=x$. $y=\frac{x^4}{2}$

3) $y=f(x)+g(x)$ ise $y'=f'(x)+g'(x)$ $y=x^2-3x+5$

4) $y=f(x).g(x)$ ise $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $y=(x^3+1)(1-x)$

5) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ ise $y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $y=\frac{3x+1}{x-2}$

6) $y=f^n(x)=(f(x))^n$ ise $y'=n(f(x))^{n-1}.f'(x)$ $y=(x^4+x)^3$

7) $y=\sqrt{f(x)}$ ise $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x^2+1}$

8) $y=\sqrt[n]{f(x)}=(f(x))^{\frac{1}{n}}$ ise $y'=\frac{f'(x)}{n.\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$, $y=\sqrt[4]{x^2+2x+5}$

9) Bileşke fonksiyon türevi $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ise

$y'=f'(g(x)).g'(x)$

Ömeklr

1) $f(3x-5) = 2x^2+x-1$ ise $f'(1)+f(1)=?$

$f'(3x-5).3 = 4x+1$

$x=2$ için $f(1) = 2.2^2+2-1 = 9$

$f'(1).3 = 9 \Rightarrow f'(1)=3$

$f'(1)+f(1) = 3+9 = 12$

2) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3}$ için $f'(1)=?$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}+3)'}{2\sqrt{\sqrt{x}+3}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+3}} = \frac{1}{4\sqrt{x\sqrt{x}+3x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{4.\sqrt{1+3}} = \frac{1}{8}$$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}$ için $f'(4)=?$

$2x+1-2x-6$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}} = \frac{\frac{1.(2x+1)-(x+3).2}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}} = \frac{-5}{(2x+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(4) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{81}_{27}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-5}{54\sqrt{7}}$$

4) $f(2x+1).(3x+1) = g(3x)$ olsun. $f(5)=3$, $g'(6)=10$ old göre $f'(5)=?$

$(f'(2x+1).2)(3x+1) + f(2x+1).3 = 3g'(3x)$

$x=2$ için $2f'(5).7 + f(5).3 = 3g'(6)$

$14f'(5) + 3.3 = 3.10 \Rightarrow f'(5) = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$

5) $f(x) = \left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^4$ $f'(0)=?$

$$f'(x) = 4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)' = 4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2(1-x^2)-(2x+4).(-2x)}{(1-x^2)^2}\right)$$

$$f'(0) = 4.4^3\left(\frac{2+0}{1}\right) = 4^4.2 = 512$$

Zincir Kuralı

① $\left.\begin{array}{l} y = y(x) \\ x = x(u) \end{array}\right\}$ ise $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{du}$

$\underbrace{y \to x \to u}$

② $\left.\begin{array}{l} y = y(x) \\ x = x(u) \\ u = u(t) \end{array}\right\}$ ise $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{du} \cdot \dfrac{du}{dt}$

$\underbrace{y \to x \to u \to t}$

Örnek $\left.\begin{array}{l} y = 3t+1 \\ t = x^2+2x+5 \end{array}\right\}$ için $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$y \to t \to x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = 3 \cdot (2x+2) = 6x+6$

— o — $y = 3(x^2+2x+5)+1 = 3x^2+6x+9 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 6x+6$

— o —

Örnek: $\left.\begin{array}{l} y = 3t^2+1 \\ t = 2u^2+3u \\ u = x+1 \end{array}\right\}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = ?$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 6t \cdot (4u+3) \cdot 1$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6 \cdot 14\,(4 \cdot 2+3) = 924$

$x = 1$ için $u = 2 \Rightarrow t = 14$

Ters Fonksiyonların Türevi

$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ türev alırsak

$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ dur

— o —

$\Rightarrow f(x_0) = y_0$ için $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ şeklindedir.

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

Örnek! $f(x) = x^3 + x$ için $(f^{-1})'(2) = ?$

$f(x_0) = 2 \Rightarrow x_0^3 + x_0 = 2 \Rightarrow x_0^3 + x_0 - 2 = 0 \Big/ (x-1)(x^2+x+2)$

$x_0 = 1$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(3x^2+1)\big|_{x=1}} = \frac{1}{4}$$

Örnek! $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$ için $(f^{-1})'(5) = ?$

$f(x_0) = 5 \Rightarrow x_0^3 - 2x_0^2 - 3x_0 + 5 = 5$

$x_0(x_0^2 - 2x_0 - 3) = 0$

$-3 \quad 1$

$x_0 = \cancel{0}, \quad x_0 = 3, \quad x_0 = \cancel{-1}$

Elet

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(3x^2 - 4x - 3)\big|_{x=3}} = \frac{1}{12}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

1) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$, $y = \sin u(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cos u(x)$

2) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$, $y = \cos u(x) \Rightarrow y' = -u'(x) \sin u(x)$

3) $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $y = \tan u(x) \Rightarrow y' = u'(x)(1 + \tan^2 u(x)) = u'(x) \sec^2 u(x)$

4) $y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x$, $y = \cot u(x) \Rightarrow y' = -u'(x)(1 + \cot^2 u(x)) = -u'(x) \operatorname{cosec}^2 u(x)$

5) $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$, $y = \sec u(x) \Rightarrow y' = u'(x) \sec u(x) \tan u(x)$

6) $y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x . \cot x$, $y = \operatorname{cosec} u(x) \Rightarrow y' = -u'(x) \operatorname{cosec} u(x) . \cot u(x)$

Örnekler

Örnek.

1) $y = \sin(x^2+x)$ için $y' = \cos(x^2+x).(2x+1)$

2) $y = \sec(1-2x) \Rightarrow y' = -2\sec(1-2x)\tan(1-2x)$

3) $y = \csc(\frac{1}{x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2}\csc\frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}$

4) $y = \sin x^2 + \sin^2 x \Rightarrow y' = 2x\cos x^2 + 2\sin x\cos x$

5) $y = \cos^2 x^3 \Rightarrow y' = -6x^2\cos x^3 \sin x^3$

6) $y = \sin(\cos x) \Rightarrow y' = -\sin x\cos(\cos x)$

7) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x} \Rightarrow y'(0) = ?$ $\quad y' = \frac{1}{1-\sin x} \Rightarrow y'(0) = 1$

8) $y = \sqrt{1+\tan x} \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}$